Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA A VII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Considerăm triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60°$ şi $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180°$. Să se arate că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Soluţie Alipim cele două triunghiuri astfel încât laturile egale să coincidă ($A = A_1$ şi $B = B_1$) iar dreapta AB să despartă punctele C şi C_1.
....**2 puncte**
Deoarece $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180°$, punctele B, C şi C_1 sunt coliniare.
....**1 punct**
Fie $D \in (CA_1$ astfel încât $C_1D \parallel AB$. Din teorema fundamentală a asemănării avem

$$\frac{DC_1}{AB} = \frac{CD}{CA}.$$

....**2 puncte**
Triunghiul ADC_1 este echilateral, deoarece $\angle DAC_1 = \angle AC_1D = 60°$.
....**1 puncte**
Atunci $\dfrac{AC_1}{AB} = \dfrac{AC + AC_1}{AC}$, de unde

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

....**1 punct**

Problema 2. Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:
- suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;
- suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;
- suma celor 25 de numere este egală cu 11.

a) Să se arate că cel puţin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conţin sunt egale.

Soluţie. a) Presupunem că toate numerele sunt mai mici strict decât $\frac{3}{5}$. Atunci suma numerelor pe fiecare linie este strict mai mică decât $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$, deci cel mult egală cu 2.

....**2 puncte**

De aici rezultă că suma tuturor numerelor este mai mică decât $5 \cdot 2 = 10$, contradicţie.

....**1 punct**

b) Suma numerelor de pe linia, respectiv coloana ce conţine numărul maxim este mai mică decât $4 \cdot 0,6 + 1 = 3,4$, deci cel mult egală cu 3.

....**2 puncte**

Pe celelalte 4 linii şi pe celelalte 4 coloane suma este maxim 2, iar $11 > 2 \cdot 5$, deci există o linie şi o coloană cu suma numerelor măcar 3, anume chiar cele ce conţin numărul maxim.

....**2 puncte**

Problema 3. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.

b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori, fiecare mai mare decât 10^{2009}.

Soluţie. a) Avem

$$m^4 + 4n^4 = m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2$$

....**1 punct**

$= (m^2 + 2n^2 + 2mn)(m^2 + 2n^2 - 2mn)$

....**1 punct**

Cum $m^2 + 2n^2 + 2mn > m^2 + 2n^2 - 2mn = n^2 + (m - n)^2 > 1$, rezultă cerinţa

....**1 punct**

b) Pentru $m = 3^{4^4}$ şi $n = 4^{\frac{5^6-1}{4}} = 4^{3906}$ avem descompunerea

$$3^{4^5} + 4^{5^6} = [(3^{256} - 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2][(3^{256} + 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2].$$

....**2 puncte**

Cum $4^{3906} > 4^{3900} = 1024^{780} > 1000^{780} = 10^{2340}$, rezultă că $(4^{3906})^2 > 10^{2009}$, deci ambii factori ai descompunerii sunt mai mari decât 10^{2009}.

....**2 puncte**

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle ADB - \angle ACB = 90°$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

a) Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\angle DAC$ şi $\angle DBC$.

b) Să se calculeze $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Soluţie. a) Avem

$$\angle DAC + \angle DBC = 180° - \angle ADC - \angle ACD + 180° - \angle BDC - \angle BCD =$$

.... **1 punct**

$= [360° - (\angle ADC + \angle BDC)] - \angle ACB = \angle ADB - \angle ACB = 90°$.

.... **2 puncte**

b) Considerăm punctul E în interiorul unghiului $\angle ADB$ cu proprietatea că $DE = BD$ şi $\angle BDE = 90°$. Atunci $\angle ADE = \angle ACB$.

Din ipoteză avem $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$, ceea ce se scrie $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$. De aici rezultă asemănarea triunghiurilor ACB şi ADE.

.... **2 puncte**

Obţinem $\angle EAD = \angle BAC$ şi $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AE}$, ceea ce implică asemănarea triunghiurilor ABE şi ACD.

.... **1 punct**

Urmează

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BD\sqrt{2}}{BD} = \sqrt{2}.$$

.... **1 punct**